数理解析研究所講究録
649巻 1988年 61-72

区間力学系のinverse limitについて

筑波大　川村一宏
(Kazuhiro Kawamura)

以下、$I=[0,1]$を単位閉区間、$f:I\twoheadrightarrow I$を上への連続写像とする。$x\in X$に対し、$O_f(x)=\{f^n(x)\mid n\geq 0\}$ をxの（fによる）軌道(orbit)という。$\mathrm{Per}f$, $\mathrm{Fix}f$で各々fの周期点の全体、fの不動点の全体を表わす。ここでは、M. Barge - J. Martin による3つの論文 [2], [3], [4] について紹介する。これらは軌道の位相的な状態、特殊な軌道を持つ点の存在、特別な周期を持つ周期点の存在等（これらを<u>力学的な性質</u>と呼ぶことにする）について調べる為に、continuum (=コンパクト連結距離空間) の理論に於ける結果が使える事を示したものである。

定義1. $f:I\twoheadrightarrow I$に対して、$(I,f)=\{(x_n)\in I^\infty \mid f(x_{n+1})=x_n,\ \forall n\geq 0\}$ とおき、これにI^∞からの部分位相を入れる。但しI^∞はIの可算積に積位相を入れたもの。(I,f) をfによる<u>inverse limit</u>という。$\pi_n:(I,f)\twoheadrightarrow(I,f)$を第$n$座標への射影とする。同相写像$\hat{f}:(I,f)\twoheadrightarrow(I,f)$が $\pi_n\circ\hat{f}=f\circ\pi_n$ を満たすように自然に定まる。また(I,f)はcontinuumである事が知られている。

一般的な問題：f の力学的な性質と (I,f) の位相的な性質の間にはどのような関係があるか？

ここでは位相的な性質として特に「continuum の indecomposability」について考える。ここで

定義と命題2. X は continuum とする。X の subcontinuum $A, B \subsetneqq X$ が存在して、$X = A \cup B$ とできる時、X は <u>decomposable</u> であるという。そうでない時、X は <u>indecomposable</u> であるという。

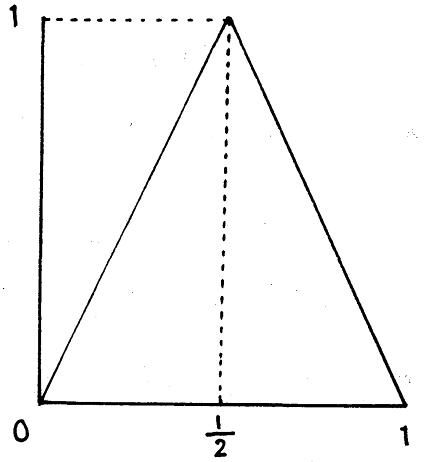
この時（[8], p.139）、

X は indecomposable $\longleftrightarrow$ X の任意の proper subcontinuum は内点を持たない.

従って、locally connected continuum は decomposable である。

まず例を挙げる（[2], example 2と3）.

例3. $f: I \twoheadrightarrow I$ を下のグラフで与えられる写像とする。



a) $\{x \in I \mid O_f(x)$ は I で dense$\} \neq \phi$.

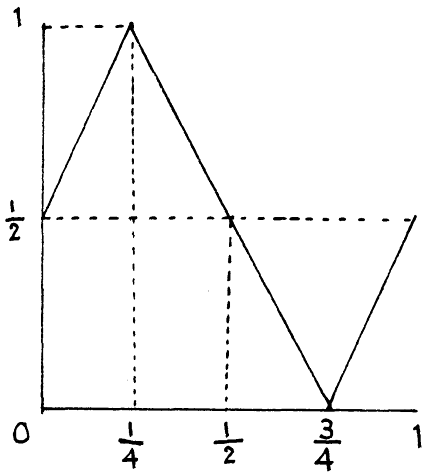
この時「f は dense orbit を持つ」と呼ぶ事にする。実際は上の集合は dense G_δ in I である。

b) 任意の $n \geq 1$ に対して f^n は dense orbit を持つ。

c) Perf は dense in I.

d) (I,f) は indecomposable (Knaster continuum と呼ばれている).

例4. $g: I \to I$ を下のグラフで与えられる写像とする。



g は例3の a), c) は満たすが、

b′) f^2 は dense orbit を持たない。

d′) (I,f) は Knaster continuum の one point union. 従って decomposable である。

次は Bing の decomposition theorem ([5] theorem 8) の系である。

定理5. (I,f) の任意の proper subcontinuum が内点を持たないとする。この時 (I,f) から arc G への写像 $p: (I,f) \to G$ が

1) 任意の $t \in G$ に対して $p^{-1}(t)$ は内点を持たない continuum.

2) 任意の同相写像 $g: (I,f) \to (I,f)$ に対して、同相写像 $\bar{g}: G \to G$ が $\bar{g} \cdot p = p \cdot g$ を満たすようにとれる.

の2条件を満たすように存在する。

1. Dense orbit と Indecomposability

定理6（[2], theorem 3）. $x \in I$ とし、$O_f(x)$ は I で dense とする。

1) $O_{f^2}(x)$ が I で dense ならば、(I, f) は indecomposable.

2) $O_{f^2}(x)$ が I で dense でなければ、indecomposable subcontinua H と K が、

a) (I, f) は H と K の one point union.

b) $\hat{f}(H) = K$, $\hat{f}(K) = H$ を満たすようとれる。

補題7（[2], Lemma 2）. $x \in I$ とし、$O_f(x)$ は I で dense とする。$s, k \geqq 0$ を整数として、$A_{s,k} = \{f^{sn+k}(x) \mid n \geqq 0\}$ とおく。

1) $A_{2,0} = O_{f^2}(x)$ が I で dense なら、任意の $s \geqq 0$ と任意の k で $0 \leqq k \leqq s-1$ を満たすものに対し、$A_{s,k}$ は I で dense.

2) $A_{2,0}$ が I で dense でないなら、$I = \bar{A}_{2,0} \cup \bar{A}_{2,1}$ でかつ

a) $\bar{A}_{2,0}$ と $\bar{A}_{2,1}$ は閉区間で、$\bar{A}_{2,0} \cap \bar{A}_{2,1}$ は1点。

b) $f(\bar{A}_{2,0}) = \bar{A}_{2,1}$ かつ $f(\bar{A}_{2,1}) = \bar{A}_{2,0}$

c) 任意の $k \geqq 1$ に対し、$A_{2k,0}$ は $A_{2,0}$ で dense, $A_{2k,1}$ は $A_{2,1}$ で dense.

定理6の証明の概略. $\underline{x} \in (I, f)$ を $\pi_0(\underline{x}) = x$ であるような点とする。1). $O_{f^2}(x)$ が I で dense ならば、内点を持つ

indecomposable continuum S が存在する事を示す。もしそうでなければ、定理5のような $p:(I,f)\twoheadrightarrow G$ が存在する。$O_{\hat{f}}(x)$ は (I,f) でdenseだから、定理5の2)より $O_{\tilde{\hat{f}}}(p(x))$ は G でdenseになるが、arc上の同相写像はdense orbitを持たないので矛盾である。

$O_{\hat{f}}(x)$ がdenseであることから、$\mathrm{int}\,S\cap\mathrm{int}\,\hat{f}^k(S)\neq\phi$ を満たす $k\geq 1$ が存在する。$S\cap\hat{f}^k(S)$ がcontinuumである事が示せるので、命題2から $\hat{f}^k(S)=S$ となる。$\hat{f}^l(x)\in S$ となる $l\geq 1$ を1つとる。補題7 1)から $A_{k,l}$ は I でdenseであり、従って $O_{\hat{f}^k}(\hat{f}^l(x))$ は (I,f) でdenseである。S は $\hat{f}^k$ で不変である事と合わせて $S=(I,f)$ だから結論が出る。

2). $O_{f^2}(x)$ が I でdenseでないなら、補題7 2)のような I の分解 $I=\bar{A}_{2,0}\cup\bar{A}_{2,1}$ を考える。

$H=\{(y_n)\in(I,f)\mid y_{2n}\in\bar{A}_{2,0},\ y_{2n+1}\in\bar{A}_{2,1}\quad\forall n\geq 0\}$

$K=\{(y_n)\in(I,f)\mid y_{2n}\in\bar{A}_{2,1},\ y_{2n+1}\in\bar{A}_{2,0}\quad\forall n\geq 0\}$ が求めるものである事がわかる。

補題7の系として次が示せる。

系8. $f:I\twoheadrightarrow I$ がdense orbit を持つなら、Perf は I でdense.

注意9. f がdense orbit を持たない時には定理6のようなはっきりとした結果を得るのは難しそうである。例えば

写像 $f: I \twoheadrightarrow I$ で　1）$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(t)<t$　$0<{}^{\forall}t<1$．2）(I,f) の一点でない全ての subcontinuum は indecomposable．であるものが存在する（[2] example 4）．1）から f は dense orbit を持たない。一方 id_I も dense orbit を持たず $(I, id_I)=I$ である。このように dense orbit を持たない写像の inverse limit は非常に様子の違うものになり得る。

2. Homoclinic point と indecomposability

定義10．1）$f: I \twoheadrightarrow I$ の不動点 $y \in I$ をとる。$x \in I$ が y に対する <u>homoclinic point</u> であるとは、次の2条件を満たすこと。

a）$f^n(x) \longrightarrow y$　as　$n \longrightarrow \infty$．

b）I の中の点列 (x_n) が、$f(x_{n+1})=x_n$　${}^{\forall}n \geqq 0$，$x_0=x$ を満たすように取れ、かつ $x_n \longrightarrow y$　as　$n \rightarrow \infty$．

2）$y \in I$ を周期 s の周期点とする。$x \in I$ が y と f^s に関して 1）の a)，b) を満たす時、x を y に対する homoclinic point という。

homoclinic point の近くの f の振舞いは一般に複雑である事が知られている。このような点の存在と (I,f) の indecomposability の関係が定理14と15で調べられている。

定理11（[3] theorem 3, 8）. $f: I \twoheadrightarrow I$ について、f^2 は dense orbit を持つとする。この時、任意の1点でない proper subcontinuum H に対して

1) $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}}\ \hat{f}^n(H) = (I, f)$ （Lim は topological limit を表わす）.

2) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, \hat{f}^{-n}(H) = 0$ （diam は直径を表わす）.

1）は次の定理から得られる．

定理12（[3] theorem 6）. $f: I \twoheadrightarrow I$ に対して

f^2 が dense orbit を持つ $\longleftrightarrow$ 任意の1点でない閉区間 $J \subset I$ に対して $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}}\ f^n(J) = I$.

2）の証明の概略．$H \subset (I, f)$ を1点でない proper subcontinuum とする。$\hat{f}^{-n}$ の定義を考える事により、次を示せばよい。

(*) $\lim \mathrm{diam}\, H_n = 0$, 但し $H_n = \pi_n(H)$.

そうでないと仮定するとある $\varepsilon > 0$ と部分列 (H_{n_i}) をとり、$\mathrm{diam}\, H_{n_i} > \varepsilon$ $\forall i \geq 0$ とできる。必要なら部分列を取り直して、$H_{n_i} \supset J$ となる1点でない閉区間 $J \subset I$ があるとしてよい。系8から J の中に異なる周期点 p, q がとれる。周期を各々 r_1, r_2 とすると、p, q から H の中の周期点 $\underline{p}$（周期 r_1）, $\underline{q}$（周期 r_2）が見つかる。$K = \cap \{L \mid L$ は $\underline{p}, \underline{q}$ を共に含む (I, f) の subcontinuum$\}$ とおくと、K は H の subcontinuum でかつ $\hat{f}^{r_1 r_2}(K) = K$ を満たす。任

意の整数$n \geq 0$に対して　$f^{n_1 n_2}(\pi_n(K)) = \pi_n(K)$ が得られるが、補題7 1)から$f^{n_1 n_2}$はdense orbit を持つから$\pi_n(K) = I$　$\forall n \geq 0$，従って$K = (I, f)$である。$K \subset H \subsetneqq (I, f)$だからこれは矛盾.

定義と定理13. Xはindecomposable continuum，$p \in X$とする。

$C_p = \{y \in X \mid p$とyを共に含むXのproper subcontinuumがある$\}$

とおき、pの(Xにおける)<u>composant</u>という。この時、

1) 2つのcomposantは交わらないか、或いは一致する。

2) composantはdense connectedでかつfirst category.

3) 異なるcomposantは非可算個存在する。

証明は [8] p.139-141.

定理14 ([3] theorem 10). $f: I \to I$に対し、f^2はdense orbitを持つとする。任意の$y \in Perf \cap \mathrm{int}\, I$に対するhomoclinic pointが存在する。

証明の概略. yの周期をsとする. $g = f^s$とおくと補題7,1)からgもdense orbitを持つ. g^2もdense orbitを持つ事を使って$x \in \mathrm{int}\, I$で$g(x) = y$を満たす点がある事がわかり、これが求める点である。

これを示す為、$\underline{y} = (y, y, \cdots) \in (I, g) \approx (I, f)$とする。$C$を$\underline{y}$の$(I, g)$におけるcomposantとする。定理13, 2)より$\pi_0(C) \supset \mathrm{int}\, I \ni x$.

従って $\underline{x} \in C$ が $\pi_0(\underline{x}) = x$ となるように取れる。$\underline{x}$ と $\underline{y}$ を共に含む proper subcontinuum H に定理11,2) を適用すると、$\hat{g}^{-n}(\underline{x}) \to \underline{y}$ as $n \to \infty$. が得られて、$\hat{g}^{-n}(\underline{x}) \to \underline{y}$ as $n \to \infty$ がわかる。このことは $\underline{x} = (x_n)$ とおくと、$g(x_{n+1}) = x_n$ かつ $x_n \to y$ as $n \to \infty$ を示し、しかも $g^n(x) = y$ $\forall n \geqq 2$ だから x は y に対する homoclinic point である。

定理5の応用として次も得られている。

定理15（[2], theorem 4）. $f: I \to I$ がある周期点に対する homoclinic point を持つなら、(I,f) は indecomposable subcontinuum を含む。

3. 周期点と indecomposability

例3の写像 f は全ての整数 $n \geqq 1$ について周期 n である点を持つ。この性質は chaotic な力学系において重要である([6]). Sarkovski の定理によれば $f: I \to I$ が2の巾でない周期の周期点を持てば、任意の整数 $n \geqq 1$ に対し 2^n-周期点を持つ([7])。このような性質と (I,f) の indecomposability との関係について

定理16（[2] Corollary, [3] theorem 13）. $f: I \to I$ は dense orbit を持つとする。

f^2がdense orbitを持つ $\longleftrightarrow$ (I,f)はindecomposable

$\downarrow$ （左）　　　　$\downarrow$ （右）

fは奇数周期の周期点を持つ

$\downarrow$

fは2の巾でない周期の周期点を持つ $\longrightarrow$ ある整数$l\geq 1$があって(I,f)はf^{2^l}で不変なindecomposable continuumを含む

$\longleftarrow$ (piecewise monotone)

周期点全体がIでdenseであるような写像は、その構造がかなりはっきりと分かる。

定理17（[4]）．$f:I\to I$に対し、$\mathrm{Per}f$はIでdenseであるとする。この時、高々可算個（空でもよい）の閉区間の族(J_i)が次を満たすように存在する。

1）任意の$k\neq l$に対して、$\mathrm{int}\,J_k\cap\mathrm{int}\,J_l=\phi$．

2）任意のkに対して$f^2(J_k)=J_k$　かつ$O_{f^4}(x_k)$がJ_kでdenseであるような点$x_k\in J_k$が存在する。

3）$f^2|I\setminus\bigcup J_i=id_{I\setminus\bigcup J_i}$．

例えば例3では$J_1=I$とすればよい。

証明の概略．(I,f)が内点を持つindecomposable continuumを含ま

ない時は、定理5によって $p:(I,f)\twoheadrightarrow G$ （G は arc）と同相写像 $\bar{\hat{f}}:G\twoheadrightarrow G$ が $p\circ\hat{f}=\bar{\hat{f}}\circ p$ となるように取れる。$\mathrm{Per}\,\bar{\hat{f}}$ は G で dense だから、$\bar{\hat{f}}^2=\mathrm{Id}_G$ であるが p が同相であることが示せるので $\hat{f}^2=$ $=\mathrm{Id}_{(I,f)}$. 従って $f^2=\mathrm{Id}_I$ である。

(I,f) が内点を持つ indecomposable continuum を含む時は、$\mathcal{H}$ をそのようなものの全体とする。任意の $H\neq K\in\mathcal{H}$ に対して $\mathrm{int}\,H\cap\mathrm{int}\,K=\phi$ だから $\mathcal{H}$ は高々可算である。$\mathcal{H}=(H_i)$ とおき、$J_i=\pi_0(H_i)$ とおくと (J_i) が求めるものである事が示される。

参考文献

1. J. Auslander - J. A. Yorke; Interval maps, factors of maps, and chaos, Tohoku Math. J. 32 (1980), p.177-188.
2. M. Barge - J. Martin; Chaos, Periodicity, and Snake-like continua, Trans. A.M.S. 289 (1985), p.355-365.
3. ______________; Dense orbit on the interval, Mich. Math. J. 34 (1987) p.3-11.
4. ______________; Dense periodicity on the interval, Proc. A.M.S. 94 (1985) p.731-735.
5. R.H. Bing; Snake-like continua, Duke Math. J. (1951) p.653 - 663.

6. T. Y. Li - J. A. Yorke; Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82 (1975), p. 985 - 992.

7. P. Stephan; A theorem of Sarkovski on the coexistence of periodic points of continuous endomorphisms of the real line, Comm. Math. Phys. 54 (1977), p. 237 - 248.

8. J. Hocking - G. Young; _Topology_, Addison-Wesley Pub. (1961).